فصل ۶

اعداد مختلط

بخش ۱.۶ تعریف اعداد مختلط

۱.۶ تعریف. هر عدد مختلط را می‌توان به صورت یک زوج مرتب $z = (x, y)$ نمایش داد که در آن x را مولفه‌ی حقیقی و y را مولفه‌ی موهومی z می‌نامند. همچنین می‌توان یک عدد مختلط را به صورت $z = x + iy$ نوشت که در آن i در دستگاه مختصات اعداد مختلط برابر با $(0, 1)$ می‌باشد. و $i^2 = -1$ است.

۲.۶ مثال. چند عدد مختلط:

الف)

$$z_1 = 2 + 3i$$

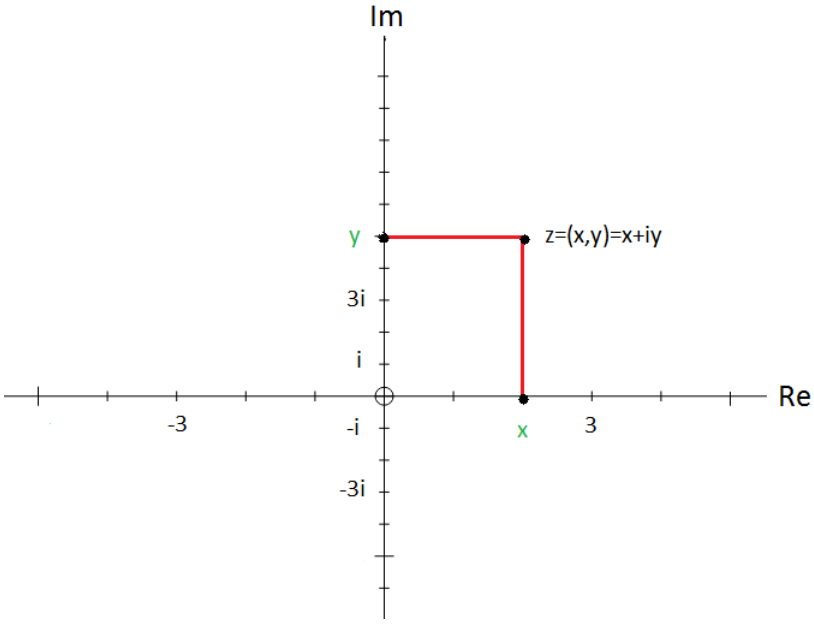
ب)

$$z_2 = -1 + i$$

ج)

$$z_3 = (-1, -2) = -1 - 2i$$

۳.۶ نکته. فرم $z = x + iy$ را فرم دکارتی عدد مختلط z می‌نامند.



شکل ۱.۶: نمایش عدد مختلط $z = x + iy$ در دستگاه اعداد مختلط

۴.۶ تعریف. مزدوج یک عدد مختلط $z = (x, y) = x + iy$ را بصورت $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ تعریف می‌کنند.

۵.۶ تعریف. قدر مطلق عدد مختلط $z = x + iy$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

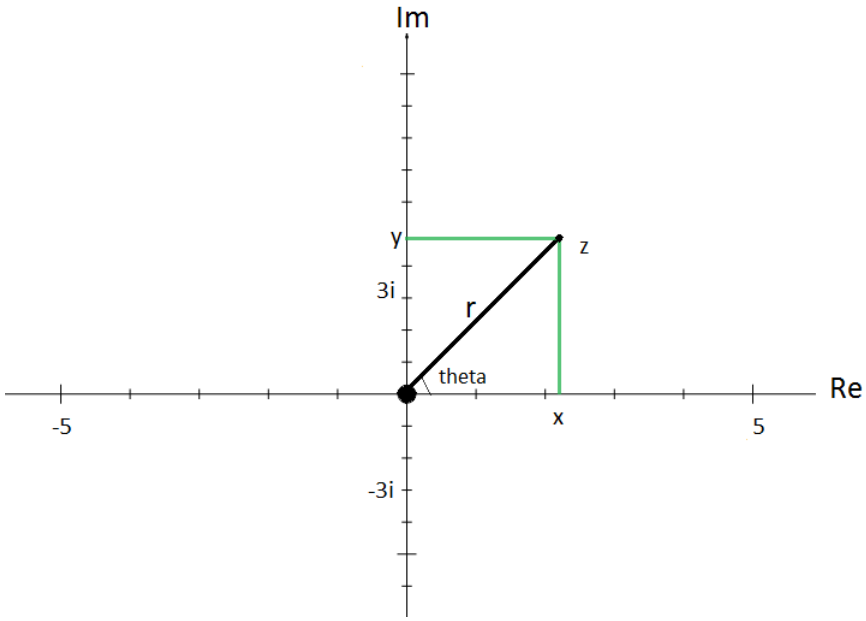
۶.۶ مثال. مزدوج و قدرمطلق اعداد مختلط زیر را مشخص کنید؟

الف)

$$z = 2 - 3i \quad \longrightarrow \quad \bar{z} = 2 + 3i \quad \longrightarrow \quad |z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

ب)

$$z = 4 + 3i \quad \longrightarrow \quad \bar{z} = 4 - 3i \quad \longrightarrow \quad |z| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$



شکل ۲.۶: هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان برحسب عدد مثبت r و زاویه‌ی θ به شکل قطبی نوشت.

بخش ۲.۶ صورت‌های استاندارد اعداد مختلط

۱.۲.۶ شکل قطبی عدد مختلط

هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان به شکل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نوشت، که در آن

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) \qquad , \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

است که θ را آرگومان و r را قدر مطلق عدد z می‌نامند.

۷.۶ مثال. شکل قطبی اعداد مختلط زیر را مشخص کنید؟

الف) $z_1 = 2 + 2i$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan(\theta) = \frac{2}{2} = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\Big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\Big)$$

ب) $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{3}$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\Big(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\Big)$$

۲.۲.۶ شکل نمایی عدد مختلط

عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توانیم بصورت $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ بنویسیم و با توجه به اتحاد اویلر

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

داریم:

$$z = re^{i\theta}$$

که شکل نمایی عدد مختلط $z = x + iy$ می‌باشد.

۸.۶ مثال. عدد مختلط $z = 3 + 3i$ را به شکل نمایی تبدیل کنید؟

$$z = 3 + 3i \qquad \longrightarrow \qquad r = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{3} = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

پس

$$z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

بخش ۳.۶ تبدیل قطبی به دکارتی

برای تبدیل یک عدد مختلط از شکل قطبی $z = re^{i\theta}$ به شکل دکارتی $z = x + iy$ از اتحاد اویلر یعنی

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

کمک گرفته و z را بصورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$z = re^{i\theta}$$
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

که شکل دکارتی عدد مختلط z می‌باشد.

۹.۶ مثال. اعداد مختلط زیر را از شکل قطبی به دکارتی تبدیل کنید؟

الف)

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

حل:

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$$

ب)

$$z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

حل:

$$\begin{aligned} 3e^{-i\frac{\pi}{6}} &= 3e^{i(-\frac{\pi}{6})} \\ &= 3\left(\cos-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right) \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

بخش ۴.۶ چهار عمل اصلی در اعداد مختلط

۱.۴.۶ جمع دو عدد مختلط

جمع دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بصورت

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

تعریف می‌شود.

۲.۴.۶ تفریق دو عدد مختلط

تفریق دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بصورت

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + i(y_1 - y_2)$$

تعریف می‌شود.

۱۰.۶ مثال. جمع و تفریق دو عدد مختلط $z_1 = 2 + 3i$ و $z_2 = 1 - 4i$ را محاسبه کنید؟

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + 1 - 4i = 3 - i$$

$$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (1 - 4i) = 1 + 7i$$

۱۱.۶ نکته. توجه شود که در محاسبات همواره $i^2 = -1$ درنظر گرفته می‌شود.

۳.۴.۶ ضرب دو عدد مختلط

ضرب دو عدد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ بصورت

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

تعریف می‌شود. پس

$$z_1.z_2 = (x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

۱۲.۶ مثال. ضرب دو عدد مختلط $z_1 = 2 - i$ و $z_2 = 3 + 4i$ را محاسبه کنید؟

حل: می‌توانیم z_1 و z_2 را بصورت $z_1 = (2, -1)$ و $z_2 = (3, 4)$ در نظر بگیریم و

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (2, -1).(3, 4) = \Big(2(3) - (-1)(4), 2(4) + (-1)(3)\Big) \\ &= (10, 5) = 10 + 5i \end{aligned}$$

همچنین با توجه به این نکته که $i^2 = -1$ است می‌توانیم ضرب را به صورت زیر هم انجام دهیم:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (2 - i).(3 + 4i) = 6 + 8i - 3i - 4i^2 \\ &= 6 - (-4) + 5i \\ &= 10 + 5i \end{aligned}$$

۴.۴.۶ تقسیم دو عدد مختلط

فرض $z_1 = (x_1, y_1) = x_1 + iy_1$ و $z_2 = (x_2, y_2) = x_2 + iy_2$ باشد، تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}.\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\\ &= \frac{x_1x_2 - i^2y_1y_2 + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}\\ &= *\end{aligned}$$

که با توجه به این که

$$(x_2 + iy_2).(x_2 - iy_2) = x_2^2 - i^2y_2^2$$

و چون $i^2 = -1$ پس $-i^2 = 1$ را در رابطه‌ی فوق جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$(x_2 + iy_2).(x_2 - iy_2) = x_2^2 + y_2^2$$

اکنون محاسبه‌ی به این صورت ادامه پیدا می‌کند:

$$\begin{aligned}* &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}\\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \Big(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\Big)i\\ &= \Big(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\Big)\end{aligned}$$

بنابراین تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \Big(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\Big)i\\ &= \Big(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\Big)\end{aligned}$$

۱۳.۶ مثال. اگر $z_1 = (3,4)$ و $z_2 = (-4,5)$ باشد، تقسیم $\frac{z_1}{z_2}$ را حساب کنید؟

حل:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(3,4)}{(-4,5)} = \left(\frac{3(-4)+4(5)}{(-4)^2+5^2}, \frac{4(-4)-3(5)}{(-4)^2+5^2}\right)\\ &= \left(\frac{-12+20}{41}, \frac{-16-15}{41}\right)\\ &= \left(\frac{8}{41}, \frac{-31}{41}\right)\end{aligned}$$

۱۴.۶ تمرین. اگر $z_1 = (-1,2)$ و $z_2 = (3,4)$ باشد، عبارت‌های زیر را حساب کنید؟

الف) $z_1 + z_2$

ب) $z_1 - z_2$

ج) $z_1 . z_2$

د) $\frac{z_1}{z_2}$