فصل ۳

مشتق

بخش ۱.۳ مقدمه

برای محاسبه‌ی شیب خط $y = ax + b$ دو نقطه‌ی x_1 و x_2 از آن را انتخاب نموده و به ازای آن‌ها مقادیر y_1 و y_2 را درنظر می‌گیریم، سپس با استفاده از فرمول

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (۱.۳)$$

شیب خط را پیدا می کنیم؛ اما برای پیدا کردن شیب در نقطه‌ی دلخواه (یا لحظه) می‌توانیم از حدگیری کمک بگیریم و شیب را در نقطه‌ی دلخواه بیابیم. این روش که درواقع تعمیمی از رابطه‌ی ۱.۳ می‌باشد منجر به تعریف قضایا و فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی شیب نمودار گردید که به فرمول‌های مشتق معروف هستند. همچنین تعبیر فیزیکی مشتق سرعت(یا شتاب) در لحظه می‌باشد که با محاسبه‌ی مشتق معادله‌ی حرکت(یا سرعت) ذره در لحظه بدست می‌آید.

۱.۳ مثال. شیب خط $y = 2x + 1$ را بیابید؟

دو نقطه‌ی $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ را درنظر می‌گیریم و به ازای آن‌ها مقادیر y_1 و y_2 را می‌یابیم:

$$x_1 = 0 \quad \longrightarrow \quad y_1 = 2(0) + 1 = 1$$
$$x_2 = 1 \quad \longrightarrow \quad y_2 = 2(1) + 1 = 3$$

اکنون بکمک رابطه‌ی ۱.۳ می توانیم شیب خط را بیابیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{1 - 0} = \frac{2}{1} = 2$$

بنابراین ؛ شیب این خط $m = 2$ است.

بخش ۲.۳ مشتق

۲.۳ تعریف. اگر تابع $f(x)$ در همسایگی نقطه‌ی x_0 تعریف شده باشد، حد زیر را در صورت وجود، مشتق تابع f در نقطه‌ی x_0 می‌نامیم و می‌گوییم f در x_0 مشتق پذیر است، هرگاه حد

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{۲.۳}$$

موجود باشد.

۳.۳ تعریف. مشتق چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_0 نیز با استفاده‌ی از دو رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{۳.۳}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{۴.۳}$$

حد ۳.۳ را مشتق راست و حد ۴.۳ را مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه‌ی x_0 می‌نامیم.

۴.۳ تذکر. مشتق، بصورت حد زیر نیز تعریف می‌شود

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{۵.۳}$$

۵.۳ نکته. $f(x)$در نقطه‌ی x_0 مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \tag{۶.۳}$$

یعنی مشتق چپ و راست با یکدیگر برابر باشند.

۶.۳ مثال. مشتق پذیری $f(x) = x^2$ را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ بررسی کنید؟

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

بنابراین مشتق $f(x)$ در $x_0 = 1$ وجود دارد و برابر با 2 است.

بخش ۳.۳ فرمول‌های مشتق

برای محاسبه‌ی مشتق توابع مختلف همچون چندجمله‌ای‌ها،مثلثاتی و ... فرمول‌هایی وجود دارند، که با دانستن آن‌ها نیازی به محاسبه‌ی مشتق از فرمول ۲.۳ یا ۵.۳ نخواهد بود:

$$y = c \quad \longrightarrow \quad y' = 0$$

$$y = 3 \quad \longrightarrow \quad y' = 0$$

$$y = ax^n \quad \longrightarrow \quad y' = anx^{n-1}$$

$$y = 2x^3 \quad \longrightarrow \quad y' = 2(3)x^2 = 6x^2$$

$$y = ae^{nx} \quad \longrightarrow \quad y' = ane^{nx}$$

$$y = 3e^{4x} \quad \longrightarrow \quad y' = 3(4)e^{4x} = 12e^{4x}$$

$$y = \sin ax \quad \longrightarrow \quad y' = a\cos ax$$

$$y = \sin 3x \quad \longrightarrow \quad y' = 3\cos 3x$$

$$y = \cos ax \quad \longrightarrow \quad y' = -a\sin ax$$

$$y = \cos 2x \quad \longrightarrow \quad y' = -2\sin 2x$$

$$y = \tan ax \quad \longrightarrow \quad y' = a(1+\tan^2 ax)$$

$$y = \tan 4x \quad \longrightarrow \quad y' = 4(1+\tan^2 4x)$$

$$y = \cot ax \quad \longrightarrow \quad y' = -a(1+\cot^2 ax)$$

$$y = \cot 2x \quad \longrightarrow \quad y' = -2(1+\cot^2 2x)$$

$$y = \arcsin ax \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}$$

$$y = \arcsin 3x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$$

$$y = \arccos ax \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-a}{\sqrt{1-(ax)^2}}$$

$$y = \arccos x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(x)^2}}$$

$$y = \arctan ax \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{a}{1+(ax)^2}$$

$$y = \arctan 3x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{3}{1+(3x)^2}$$

$$y = \operatorname{arccot} ax \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-a}{1+(ax)^2}$$

$$y = \operatorname{arccot} 2x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-2}{1+(2x)^2}$$

$$y = a^x \quad \longrightarrow \quad y' = (\ln a).a^x$$

$$y = 3^x \quad \longrightarrow \quad y' = (\ln 3).3^x$$

$$y = \log_a x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x(\ln a)}$$

$$y = \log_2 x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x(\ln 2)}$$

توجه شود که $\ln x = \log_e x$ و منظور از e عدد نپر [۱] است.

[۱] عدد نپر برابر است با $e \simeq 2/74$

۷.۳ مثال. مشتق توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = x^2 + 5x - 1$

$$y' = 2x + 5$$

ب) $y = \sin x - x^5$

$$y' = \cos x - 5x^4$$

ج) $y = \arcsin x + \sin x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \cos x$$

د) $y = \cot x - x^2$

$$y' = -(1 + \cot^2 x) - 2x$$

بخش ۴.۳ قضایای مشتق

۸.۳ قضیه. هر تابع مشتق پذیر ، پیوسته است.

۹.۳ نتیجه. هر تابعی که پیوسته نباشد، مشتق پذیر نیست.

۱۰.۳ مثال. مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ بررسی کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ,x \geq 1 \\ 2x & ,x < 1 \end{cases}$$

با گرفتن مشتق به ازای مقادیر بزرگتر و کوچکتر از 1 خواهیم داشت

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ,x > 1 \\ ? & ,x = 1 \\ 2 & ,x < 1 \end{cases}$$

اما نقطه‌ی مورد بحث $x_0 = 1$ است که مشتق راست و چپ تابع $f(x)$ برابر است با

$$f_+(1) = 2x\,|_{x=1} = 2(1) = 2$$
$$f_-(1) = 2$$

بنابراین $f_+(1) = f_-(1) = 2$ و در شرط مشتق پذیر بودن ۶.۳ صدق می‌کند. اما تابع f در نقطه‌ی 1 پیوسته نیست، زیرا

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2(1)$$

$$f(1) = 1$$

چون حد چپ با حد راست و مقدار تابع در نقطه‌ی $x_0 = 1$ برابر نیست پس پیوسته نمی‌باشد و در نتیجه (با وجود برابر بودن مشتق چپ و راست) در نقطه‌ی $x_0 = 1$ مشتق پذیر نخواهد بود.

۱۱.۳ تذکر. با توجه به مثال قبلی، پیش از بررسی مشتق پذیری می‌بایستی پیوسته بودن تابع در نقطه‌ی مورد نظر را بررسی کنیم و در صورتی که پیوسته نباشد آن‌گاه مشتق پذیر نیز نخواهد بود.

۱۲.۳ مثال. مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه‌ی $x_0 = 1$ بررسی نمائید؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ،x \geq 1 \\ 2x-1 & ،x < 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & ،x > 1 \\ ? & ،x = 1 \\ 2 & ،x < 1 \end{cases}$$

ابتدا به بررسی پیوستگی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x_0 = 1$ می‌پردازیم

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x-1 = 2(1)-1 = 1$$

$$f(1) = (1)^2 = 1$$

بنابراین تابع در نقطه‌ی 1 پیوسته است، و در نتیجه شرط لازم برای مشتق پذیری را دارد حال به محاسبه مقدار مشتق چپ و راست در نقطه‌ی مورد نظر می‌پردازیم

$$f'_+(1) = 2x|_{x_0=1} = 2(1) = 2$$

$$f'_-(1) = 2$$

پس

$$f'_+(1) = f'_-(1) = 2$$

مشتق چپ و راست با یکدیگر برابر است و در نتیجه در نقطه‌ی $x_0 = 1$ مشتق پذیر و مشتق آن برابر با 2 است.

۱۳.۳ قضیه. فرض کنید که $f(x)$ و $g(x)$ توابعی مشتق پذیر باشند، دراین‌صورت:

۱) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

۲) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

۳)

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)}$$

، بشرطی که $g(x) \neq 0$ باشد.

۴) $(f(g(x))' = g'(x).f'(g(x))$

۱۴.۳ مثال. مشتق توابع زیر را بدست آورید.

۱) $y = \sin x - \tan x$

$$y' = \cos x - (1 + \tan^2 x)$$

۲) $y = \cos^2 x + 3x$

$$y' = 2(-\sin x)\cos x + 3 = -2\sin x \cos x + 3$$

۳) $y = \sin x.\cos x$

$$y' = \cos x \cos x + (-\sin x).\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

۴) $y = x^2 \tan x$

$$y' = 2x.(\tan x) + x^2(1 + \tan^2 x) = x^2 \tan^2 x + 2x \tan x + x^2$$

۵) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$y' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

۶) $y = \dfrac{x^2}{\sin x}$

$$y' = \frac{2x.\sin x - \cos x.x^2}{\sin^2 x} = \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$$

۷) $y = \cos(2x)$

$$y' = 2.(-\sin(2x)) = -2\sin(2x)$$

۸) $y = \tan(x^3)$

$$y' = 3x^2(1+\tan^2(x^3))$$

بخش ۵.۳ مشتق زنجیره‌ای

درواقع مورد ۴ از قضیه‌ی فوق قاعده‌ی مشتق زنجیره‌ای یا مشتق ترکیب توابع است.

۱۵.۳ مثال. اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sin x$ باشد مشتق تابع $fog(x)$ را بیابید؟

$$[fog(x)]' = f'(g(x)).g'(x)$$

$$g'(x) = \cos x \qquad , \qquad f'(x) = 2x$$

$$f'(g(x)) = 2(\sin x)$$

پس

$$[fog(x)]' = 2\sin x.\cos x$$

۱۶.۳ مثال. اگر $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد مشتق تابع $fog(x)$ را بیابید؟

$$[fog(x)]' = f'(g(x)).g'(x)$$

$$g'(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad , \qquad f'(x) = 3x^2$$

$$f'(g(x)) = 3(\sqrt{x})^2 = 3x$$

پس

$$[fog(x)]' = 3x.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

۱۷.۳ نکته. هرگاه u تابعی مشتق‌پذیر برحسب x باشد، بنابر قضیه مشتق ترکیب توابع داریم:

$$y = u^n \quad \longrightarrow \quad y' = nu'u^{n-1}$$

$$y = (\sin x)^2 \quad \longrightarrow \quad y' = 2\cos x \sin x$$

$$y = e^u \quad \longrightarrow \quad y' = u'e^u$$

$$y = e^{x^2} \quad \longrightarrow \quad y' = 2xe^{x^2}$$

$$y = \sqrt[m]{u^n} = u^{\frac{n}{m}} \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{n}{m}u'.u^{\frac{n-m}{m}}$$

$$y = \sqrt[3]{(\sin x)^2} = (\sin x)^{\frac{2}{3}} \quad \longrightarrow$$

$$y' = \frac{2}{3}(\cos x).(\sin x)^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3}(\cos x).(\sin x)^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3}(\cos x)\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}} = \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}$$

$$y = \sin u \quad \longrightarrow \quad y' = u'\cos u$$

$$y = \sin x^3 \quad \longrightarrow \quad y' = 3x^2\cos x^3$$

$$y = \cos u \quad \longrightarrow \quad y' = -u'\sin u$$

$$y = \cos x^2 \quad \longrightarrow \quad y' = -2x\sin x^2$$

$$y = \tan u \quad \longrightarrow \quad y' = u'(1+\tan^2 u)$$

$$y = \tan 2x^2 \quad \longrightarrow \quad y' = 4x(1+\tan^2(2x^2))$$

$$y = \cot u \quad \longrightarrow \quad y' = -u'(1+\cot^2 u)$$

$$y = \cot 2x \quad \longrightarrow \quad y' = -2(1+\cot^2 2x)$$

$$y = \arcsin u \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-(u)^2}}$$

$$y = \arcsin 2x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$y = \arccos u \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-(u)^2}}$$

$$y = \arccos x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctan u \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{u'}{1+(u)^2}$$

$$y = \arctan 2x^3 \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{6x^2}{1+(2x^3)^2} = \frac{6x^2}{1+4x^6}$$

$$y = \operatorname{arccot} u \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-u'}{1+(u)^2}$$

$$y = \operatorname{arccot} 2x^2 \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{-4x}{1+(2x^2)^2} = \frac{-4x}{1+4x^4}$$

$$y = a^u \quad \longrightarrow \quad y' = u'(\ln a).a^u$$

$$y = 3^{x^2} \quad \longrightarrow \quad y' = 2x.(\ln 3).3^{x^2}$$

$$y = \ln u \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \ln x^3 \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$$

$$y = \log_a u \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{u'}{u(\ln a)}$$

$$y = \log_4 x^3 \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{3x^2}{x^3(\ln 4)} = \frac{3}{x(\ln 4)}$$

بخش ۶.۳ مشتق مرتبه دوم

مطابق با آنچه که در محاسبه‌ی مشتق توابع دیده‌ایم ما از تابع $y = f(x)$ مشتق گیری می‌کنیم و آن را با نماد y' نشان می‌دهیم، حال اگر این عمل مشتق گیری را یکبار دیگری بر روی تابع $y' = f'(x)$ اعمال کنیم مشتق مرتبه‌ی دوم آن بدست می‌آید که برابر با $y'' = f''(x)$ است:

۱۸.۳ مثال. مشتق مرتبه اول و دوم توابع زیر را محاسبه کنید؟

الف) $y = 3x^2 + 4x - 1$

$$y' = 6x + 4$$
$$y'' = 6$$

ب) $y = 2cosx$

$$y' = -2sinx$$
$$y'' = -2cosx$$

ج) $y = e^{2x}$

$$y' = 2e^{2x}$$
$$y'' = 4e^{2x}$$