۲-۱۲- پیوست

۲-۱۲-۱- دستگاه مختصات خمیده خط ۳ بُعدی:

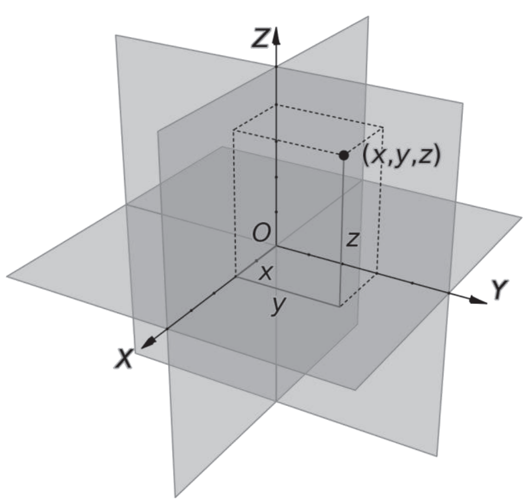
دستگاه‌های مختصاتی که بیشتر مورد نظرند، عبارتند از دستگاه‌هایی که معادله دیفرانسیلی

$$\nabla^{۲}\psi+k^{۲}\psi=۰ \qquad \text{(پ۲-۱)}$$

در آنها قابل جداسازی است. این معادله برخلاف ظاهر ساده‌ای که دارد، بسیار کلی است. چراکه با مقادیر متفاوت k می تواند دستگاه‌های مختصات متفاوت را بسازد. به طور مثال

(معادلهٔ لاپلاس)	$\nabla^{۲}\psi=۰$	$k^{۲}=۰$	(پ۲-۲)
(معادلهٔ هلمهولتز)	$\nabla^{۲}\psi+k^{۲}\psi=۰$	$k^{۲}>۰ \quad (\text{const})$	(پ۲-۳)
(معادلهٔ پخش)	$\nabla^{۲}\psi-k^{۲}\psi=۰$	$k^{۲}>۰ \quad (\text{const})$	(پ۲-۴)
(معادلهٔ شرودینگر)	$\nabla^{۲}\psi+\dfrac{۲m}{\hbar^{۲}}(E-V)\psi=۰$	$k^{۲}=\text{const}\times E$	(پ۲-۵)

به این ترتیب ۱۱ دستگاه مختصاتی وجود دارد که در آنها معادلهٔ (پ۲-۱) قابل جداسازی است و جملگی آنها را می‌توان به عنوان حالتهای خاصی از دستگاه بیضیوار هم کانون مطرح کرد. بنابراین ساده ترین دستگاه، مختصات دکارتی و بعد از آن، دستگاه‌های **مختصات خمیده خط ۳ بُعدی** استوانه ای و کروی است. قابل ذکر است می‌توان دستگاه‌ها را در حالت کلی n بُعدی در نظر گرفت. اما در اینجا صرفاً قصد داریم دستگاهی از مختصات خمیده خط ۳ بُعدی تشکیل دهیم که هر یک از دستگاه‌های خاص ۳ بُعدی مورد نظر را پوشش دهد.



شکل ۲-۳- دستگاه مختصات ۳ بُعدی

همانطور که پیشتر نیز گفته بودیم، هر نقطهٔ (x,y,z) را می‌توان محل برخورد سه صفحه در مختصات دکارتی یا محل برخورد سه سطحی بدانیم که مختصات جدید خمیده را می‌سازد. اگر سطوح مختصاتی خمیده را با $q_{۱}=\text{const}$، $q_{۲}=\text{const}$ و $q_{۳}=\text{const}$ توصیف کنیم، می‌توانیم نقطهٔ مورد نظر را با $(q_{۱},q_{۲},q_{۳})$ یا (x,y,z) مشخص کنیم.

	مختصات کروی	مختصات استوانه‌ای دوار	مختصات خمیده عام
(پ۲-۶)	r,θ,φ	ρ,φ,z	q_1,q_2,q_3
(پ۲-۷)	$x=r\sin\theta\cos\varphi$	$x=\rho\cos\varphi$	$x=x(q_1,q_2,q_3)$
(پ۲-۸)	$y=r\sin\theta\sin\varphi$	$y=\rho\sin\varphi$	$y=y(q_1,q_2,q_3)$
(پ۲-۹)	$z=r\cos\theta$	$z=z$	$z=z(q_1,q_2,q_3)$

با مشخص بودن x ، y و z ، به روابط معکوس می‌رسیم

	مختصات کروی	مختصات استوانه‌ای دوار	مختصات خمیده عام
(پ۲-۱۰)	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$	$q_1=q_1(x,y,z)$
(پ۲-۱۱)	$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$	$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	$q_2=q_2(x,y,z)$
(پ۲-۱۲)	$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$	$z=z$	$q_3=q_3(x,y,z)$

در حالت کلی هر بردار $\vec{F}$ را می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\vec{F}=F_1\hat{e}_1+F_2\hat{e}_2+F_3\hat{e}_3 \qquad \text{(پ۲-۱۳)}$$

با دیفرانسیل گیری از مختصات‌های دکارتی، معادله‌های(پ۲-۷) الی (پ۲-۹)، نسبت به مختصات خمیده عام خواهیم داشت

$$dx=\frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3 \qquad \text{(پ۲-۱۴)}$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3 \qquad \text{(پ۲-۱۵)}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \qquad \text{(پ۲-۱۶)}$$

هرگاه بردار المان جابه‌جایی در دستگاه مختصات دکارتی مطابق معادله (۲-۶۲)، $d\vec{s}=dx\hat{i}+dy\hat{j}+dz\hat{k}$ باشد، مجذور فاصلهٔ بین دو نقطه مجاور، بنابر قضیهٔ فیثاغورث، عبارت است از

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad \text{(پ۲-۱۷)}$$

این در حالی است که عنصر مجذور فاصله را در دستگاه مختصات خمیده به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}dq_1^2 + g_{12}dq_1dq_2 + g_{13}dq_1dq_3 \\ &+ g_{21}dq_2dq_1 + g_{22}dq_2^2 + g_{23}dq_2dq_3 \\ &+ g_{31}dq_3dq_1 + g_{32}dq_3dq_2 + g_{33}dq_3^2 \\ &= \sum_{ij} g_{ij}dq_idq_j \end{aligned} \tag{پ۲-۱۸}$$

که به آن فضای متریک یا ریمانی می‌گویند. حال اگر معادلات (پ۲-۱۴) الی (پ۲-۱۶) را به توان ۲ برسانیم و مطابق رابطهٔ (پ۲-۱۷) با هم جمع کنیم و سپس نتیجه بدست آمده را با معادلهٔ فوق مقایسه کنیم، ضرایبی بدست می‌آیند که به متریک مشهور هستند. این ضرایب عبارت خواهند بود از

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} \tag{پ۲-۱۹}$$

مولفه‌های متریک، در نسبیت عام، با خواص ماده تعیین می‌شوند که در آن مبحث هندسه و فیزیک در هم ادغام شده‌اند. اما اگر توجه خود را صرفاً به مختصات متعامد (مانند دکارتی) معطوف کنیم خواهیم یافت که می‌بایست داشته باشیم

$$g_{ij} = 0 \qquad \text{اگر} \qquad i \neq j \tag{پ۲-۲۰}$$

برای ساده نویسی از نماد گذاری $g_{ij} = h_i^2$ استفاده می‌کنیم و در نتیجه خواهیم داشت

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = \left(h_1dq_1\right)^2 + \left(h_2dq_2\right)^2 + \left(h_3dq_3\right)^2 \tag{پ۲-۲۱}$$

بردار جابه‌جایی

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= ds_1\hat{e}_1 + ds_2\hat{e}_2 + ds_3\hat{e}_3 = h_1dq_1\hat{e}_1 + h_2dq_2\hat{e}_2 + h_3dq_3\hat{e}_3 \\ &= \sum_i h_idq_i\hat{e}_i \end{aligned} \tag{پ۲-۲۲}$$

اندازه المان بردار سطح در راستای k(عمود بر i و j، که الزاماً معرف بردارهای یکه در مختصات دکارتی نیستند)

$$dS_k = ds_ids_j = h_ih_jdq_idq_j \tag{پ۲-۲۳}$$

و در نهایت المان حجم عبارت خواهد بود از

$$dv = ds_1ds_2ds_3 = h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3 \tag{پ۲-۲۴}$$

با مقایسه روابط به دست آمده، با روابطی که در هریک دستگاه‌های مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی پیشتر بدست آورده بودیم خواهیم داشت

	مختصات کروی	مختصات استوانه‌ای دوار	مختصات دکارتی
(پ۲-۲۵)	$h_1 = h_r = 1$	$h_1 = h_\rho = 1$	$h_1 = h_x = 1$
(پ۲-۲۶)	$h_2 = h_\theta = r$	$h_2 = h_\varphi = \rho$	$h_2 = h_y = 1$
(پ۲-۲۷)	$h_3 = h_\varphi = r\sin\theta$	$h_3 = h_z = 1$	$h_3 = h_z = 1$

۲-۱۲-۲- گرادیان در مختصات خمیده خط ۳ بُعدی:

در حسابان بردارها گرادیان یک میدان نرده‌ای، میدانی برداری است که مؤلفه‌های آن نرخ تغییر میدان نخستین را در جهت‌های مختلف نشان می‌دهد. جهت خود میدان برداری گرادیان جهت بیشینهٔ تغییرات است.

$$\begin{aligned}\nabla\psi(q_1,q_2,q_3) &= \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial s_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\psi}{\partial s_3}\hat{e}_3 \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial h_1 q_1}\hat{e}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial h_2 q_2}\hat{e}_2 + \frac{\partial\psi}{\partial h_3 q_3}\hat{e}_3\end{aligned} \qquad \text{(پ۲-۲۸)}$$

۲-۱۲-۳- واگرایی در مختصات خمیده خط ۳ بُعدی:

برای هر میدان برداری $\vec{F}$ مطابق (پ۲-۱۳) خواهیم داشت

$$\nabla\cdot\vec{F}(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(h_2h_3F_1\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(h_1h_3F_2\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(h_1h_2F_3\right)\right) \qquad \text{(پ۲-۲۹)}$$

۲-۱۲-٤- لاپلاسی در مختصات خمیده خط ۳ بُعدی:

$$\nabla\cdot\nabla\psi(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right) \qquad \text{(پ۲-۲۹)}$$

۲-۱۲-۵- تاو در مختصات خمیده خط ۳ بُعدی:

$$\nabla\times\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix} \qquad \text{(پ۲-۳۰)}$$

تمرین: ابتدا با استفاده از رابطهٔ (پ۲-۲۳) بردار سطح را در دستگاه مختصات خمیده خط ۳ بُعدی بدست آورید. سپس با استفاده از تعاریف واگرایی و تاو، هریک از روابط مربوطه را در این دستگاه، اثبات کنید.