$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{8}$

$3)\ y'' + 4y = 2\sin 2x$

حل) $y'' + 4y = 0 \Rightarrow m^2 + 4 = 0 \qquad m^2 = -4 = 4i^2 \Rightarrow m\begin{cases} +2i \\ -2i \end{cases}$

$m = 0 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 2$

$y_h = e^{0x}(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

$$w = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = 0$$
$$= -2(\sin^2 2x + \cos^2 2x) = -2$$

$$u = -\int \frac{\cos 2x.2\sin 2x}{-2}dx = -\int \frac{\sin 4x}{-2}dx = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{4}\cos 4x = -\frac{1}{8}\cos 4x$$

$$u = -\int \frac{\cos 2x.2\sin 2x}{-2}dx = -\int \sin^2 2x dx = -\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x)^{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x$$

جایگذاری $\rightarrow y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + (-\frac{1}{8}\cos 4x)\sin 2x + (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x)\cos 2x$

اوپراتور لاپلاس:

فرض کنید که f یک تابع باشد آن گاه لاپلاس $L(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$ و $f(x)dx$
و $l(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}$

مثال) لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

$1) f(x)e^{ax}$

حل) $l(f(x)) \Rightarrow l(e^{ax}) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}.e^{ax}dx$

$$= \int_0^{+\infty} e^{x(a-s)}dx = \left[\frac{1}{a-s}e^{x(a-s)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a-s}e^{-\infty} - \frac{1}{a-s}e^0 = \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

$le^{(am)} = \frac{1}{s-a}$

$$\ln(\sin ax) \rightarrow I = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin ax dx$$

$$I = \int \begin{matrix} a{=}e^{-sx} \rightarrow dx{=}-se^{-sx}dx \\ dv{=}\sin axdx \rightarrow v{=}\frac{-1}{a}\cos ax \end{matrix}$$ از تابع جز به جز حل می کنیم

$$I = \frac{-1}{a}e^{-sx}\cos ax - \frac{s}{a}\int_e^{-sx}\cos axdx$$

$$\begin{cases} u{=}e^{-sx} \rightarrow dx{=}-se^{-sx}dx \\ dv{=}\cos xdx \rightarrow v{=}\frac{1}{a}\sin axdx \end{cases}$$

$$I = \frac{-1}{a}e^{-sx}\cos ax - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-sx}\sin ax + \frac{s}{a}I\right]$$

$$I + \frac{S^2}{a^{2}} = I$$

$4)Ln(x^n)^4 = ?$

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}.x^{n^4}dx = \left[\frac{-1}{s}x^4e^{-sx} - 4x^3\frac{1}{s^2}e^{-sx} - 12x^2\frac{1}{s^3}e^{-sx} - 24x\frac{1}{s^4}e^{-sx} - 24\frac{1}{s^5}e^{-sx}\right]_0^{+\infty}$$

$$0 - \left[-\frac{24}{s^5}\right] = \frac{24}{s^5} = \frac{4i}{s^5} \Rightarrow L(x^n) = \frac{ni}{s^{n+1}}$$

$$L(x^n) = \frac{ni}{s^{n+1}}$$

$L(af(x) + by(x)) = alf(x) + bl(g(x))$ لاپلاس خاصیت خطی دارد

$$5)L(shax) = L(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}) = \frac{1}{2}\left[L(e^{ax}) - L(e^{-ax})\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{s+a-(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]=\frac{1}{2}0\frac{2a}{a^2-s^2}\Rightarrow L(shax)=\frac{a}{s^2-a^2}$$

$L(chax)=\dfrac{s}{s^2-a^2}$ فرمول

$$L(k)=?\int_0^\infty e^{-sx}.kdx$$

جواب : $\dfrac{k}{s}$ لاپلاس عدد $\Leftarrow$ عدد / s

$$L(e^a x)=\frac{1}{s-a}=L^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right)=e^{ax}$$

تبدیلات لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

1) $f(x)=\sin 3x+\cos 2x$

حل) $L(f)=L(\sin x)+L(\cos 2x)=\dfrac{3}{q+s^2}+\dfrac{s}{4+s^2}$

2) $f(x)=sh4x-ch2x$

حل) $L(f)=L(sh4x)-L(ch2x)=\dfrac{4}{s^2-16}-\dfrac{s}{s^2-4}$

3) $f(x)=\sin 3x\cos 2x$

$$L(f)=L\left[\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)\right]=\frac{1}{2}L(\sin 5x+\frac{1}{2}L\sin x)=\frac{1}{2}.\frac{5}{25+s^2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{1+s^2}$$

4) $f(x)=shxchx=\dfrac{c^x-e^{-x}}{2}.\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}+e^0-e^0-e^{-2x}}{4}=\dfrac{e^{2x}-e^{2x}}{4}=\dfrac{1}{4}\left[L(e^{2x})-L(e^{-2x})\right]$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{s-2}-\frac{1}{+s+2}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2}\right]=\frac{1}{4}.\frac{+s+2-(s-2)}{(s-2)(s+2)}=\frac{1}{4-s^2}$$

5) $f(x) = shx.\cos x$

تذکر:
$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i\sin x \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} . \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} - e^{(-1-i)x} - e^{(-1-i)x}) \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

$$L(f) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{-1-i+s} + \frac{1}{-1+i+s} - \frac{1}{+1-i+s} - \frac{1}{+1+i+s}\right]$$

7) $f(x) = \cos^{2} 3x$

8) $f(x) = x^{4} - x^{2} - 3$

9) $f(x) = e^{-3x} + sh2x$

10) $f(x) = \sin^{2} x - \cos^{2} x$

11) $f(x) = \cos^{4} x - \sin^{4} x$

12) $f(x) = \sin 5x \sin x$

13) $f(x) = \cos x \cos 2x$

14) $f(x) = \sin x ch2x$

فرض کنید f(x) یک تابع لاپلاس باشد . آنگاه لاپلاس f تابعی مانند f است بهطوری که لاپلاس f برابر f باشد .

به عبارتی دیگر $L^{-1}(f(s)) = f(x) \leftrightarrow L(f(x)) = f(s)$

معکوس لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

$1) f(s) = \frac{4i}{s^5}$ $\qquad L^{-1} = (\frac{4i}{s^5}) = x^4$

تذکر : لاپلاس معکوس خاصیت خطی دارد (می توانیم فریبها را بیرون بکشیم و جمع کنیم و...)

$2) L^{-1}(\frac{2}{S^2})$ $\qquad \Rightarrow$ حل $\frac{2}{5i}L^{-1}(\frac{5i}{s^6}) = \frac{2}{120}x^5 = \frac{x^5}{60}$

$$3) L^{-1}(\frac{s+3}{s^7}) = L^{-1}(\frac{1}{s^6}) + 3L^{-1}(\frac{1}{s^7}) = \frac{1}{5i}L^{-1}(\frac{5i}{s^6}) + \frac{3}{6i}L^{-1}(\frac{6i}{s^2}) = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{240}x^6$$

$$4) L^{-1}(\frac{s+4}{9+s^2}) = L^{-1}(\frac{s}{9+s^2}) + 4L^{-1}(\frac{1}{9+s^2}) = \cos 3x + \frac{4}{3}L^{-1}(\frac{1\times 3}{9+s^2}) = \cos 3x + \sin 3x$$

$$4) L^{-1}(\frac{s+3}{s^3-4s^2}) \qquad \frac{s+3}{s^2(s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{c}{(s-4)} = \frac{As(s-4)+B(s-4)+ds^2}{s^2(s-4)}$$

$$s = 0 \to -4B = 3 \to B = -\frac{3}{4}$$

$$s = 4 \to 16c = 7 \to c = \frac{7}{16}$$

$$s = 1 \to -3A - 3B + C = 4$$

$$-3A = 4 - \frac{3}{4} - \frac{7}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3A = \frac{64-12-7}{16} \to A = \frac{15}{16}$$

$$L^{-1}(\frac{15/6}{S}) + L^{-1}(\frac{-3/4}{S^2}) + L^{-1}(\frac{7/16}{S-4})$$

$$= \frac{15}{16}L^{-1}n(\frac{1}{s}) - \frac{3}{4}L^{-1}(\frac{1}{s^2}) + \frac{7}{16}L^{-1}(\frac{1}{s-4}) = \frac{15}{16} - \frac{3}{4}x + \frac{7}{16}e^{4x}$$

استفاده از تبدیل

یکی از کاربردهای تبدیلات لاپلاس از حل معادلات دیفرانسیل خطی می باشد . بدین ترتیب که از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می گیریم . بعد ازپیدا کردن لاپلاس y با فرض آنکه $L(y)=G(s)$ آنگاه y را برابر لاپلاس معکوس G فرض می کنیم (همچنین از تبدیل لاپلاس مشتق که در ذیل آمده است استفاده می کنیم :

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - s^{n-1} y(0) - s^{n-1} y'(0) \ldots\ldots y^{(n-1)}(0)$$

مثال : در صورتی که $y=\sin 2x$ مطلوب $L(y''')$

$$(n=3) \to L(y''') = s^3 L(y) - s^{2-1} y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

$$= s^3 \frac{2}{4+s^2} - s^2(0) - s(2) = 0 \to L(y''') = \frac{2s^3}{4+s^2} - 2s = \frac{2s^3 - 8s - 2s^3}{4-s^2} = -\frac{-8s}{4+s^2}$$

$$y = \sin 2x \to y' = 2\cos 2x \to y'' = -4\sin 2x \to y''' = -8\cos 2x$$

$$y(0) = \sin 2(0) = 0 \to y'(0) = 2\cos 2(0) = 2 \Rightarrow y''(0) = 0$$

لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

$1) y = f(x) = \sin^2 x \Rightarrow s^2$

$$L(y'') = s^2 l(y) - sy(0) - y'(0)$$

$$y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x \qquad y'' = 2\cos 2x$$

$$L(2\cos 2x) = s^2 L(\sin^2 x) - s \times 0 - 0$$

$$\to 2\frac{s}{4+s^2} = s^2 L(\sin^2 x) \to L(\sin^2 x) = \frac{2}{s(4+s^2)} = \frac{2}{46+s^3}$$

$2) y = f(x) = \cos^3 x$

حل) $y' = -3\cos^2 x \sin x = -3\cos x \cos x \sin x = -\frac{3}{2}\sin 2x \cos x$

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\left[\sin(2x+x) + \sin(2x-x)\right]$$

$$= -\frac{3}{4}\left[\sin 3x + \sin x\right] \Rightarrow L(y') = sL(y) - y(0)$$

$$\to -\frac{3}{4}\left[\frac{3}{9+s^2} + \frac{1}{1+s^2}\right] = sL(\cos^3 x) - 1$$

$$\to sL\cos^3 x = \frac{-9}{36+4s^2} - \frac{3}{4+4s^2} + \frac{1}{s}$$

$$L(\cos^3 x) = \frac{-9}{s(36+4s^2)} - \frac{3}{s(4+4s^2)} + \frac{1}{s}$$

معادلات دیفرانسیل زیر را با تبدیل لاپلاس و با توجه به شرایط داده شده حل نمایید .

1) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \qquad \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$

حل) $y'' + 3y' + 2x = 0 \Rightarrow L(y'') + 3l(y') + 2L(x) = L(0)$

$$s^2 L(y) - sy(0) - y'(0) + 3(sl(y) - y(0)) + 2\frac{1i}{s^2} = \frac{0}{s}$$

$$s^2 L(y) - s - 2 + 3sL(y) - 3 + \frac{2}{s^2} = 0$$

$$(s^2 + 3s)l(y) = s + 5 - \frac{2}{s^2}$$

$$L(y) = \frac{s}{s^2+3s} + \frac{5}{s^2+3s} - \frac{2}{s^2(s^2+3s)}$$

$$y = L^{-1}(\frac{1}{s+3}) + 5L^{-1}(\frac{1}{s(s+3)}) - 2L^{-1}(\frac{1}{s^3(s+3)}) =$$

$$= e^{-3x} + 5\left[\frac{1}{3}l^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{3}l^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right] - 2\left[l^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s+3)}\right)\right]$$

$$e^{-3x} + 5\left[\frac{1}{3}l^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{1}{3}l^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{s(s+3)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{s+3} = \frac{A(s+3)+BS}{s(s+3)} = \frac{1/3}{s} + \frac{1/3}{(s+3)}$$

$$A(S+3) + Bc = 1$$

$$s = 0 \to 3A = 1 \quad A = \frac{1}{3} \qquad , \qquad s = -3 \to -3B = 1 \qquad B = \frac{-1}{3}$$

$$\frac{1}{s^3(s+3)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{s^2} + \frac{3}{s^3} + \frac{D}{S+3}$$

$$\frac{AS^2(s+3) + Bs(s+3)C(s+3) + ds^3}{s^3(s+3)}$$

$$S = 0 \to C = \frac{1}{3} \qquad\qquad S = -3 \Rightarrow D = \frac{-1}{27}$$

$$S = 1 \to 4A + 4B + 4C + d = 1 \to 4A + 4B = \frac{-8}{27}$$

$$S = -1 \to 2A - 2B - 2C - d = 1 \to 2A + 2B = \frac{44}{27}$$

$$\Rightarrow 8A = \frac{80}{27} \to A = \frac{10}{27} \qquad , \qquad B = \frac{-12}{27}$$

$$-2\left[\frac{10}{27}L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{12}{27}l^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1}{3}l^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) - \frac{1}{27}l^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow y = e^{-3x} + \frac{5}{3} - \frac{5}{3}e^{-3x} - \frac{20}{27} + \frac{24}{27}x - \frac{2}{6}x^2 + \frac{2}{27}e^{-3x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-16}{27}e^{-3x} + \frac{24}{27}x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{27}$$

استفاده از لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل :

یکی از کاربردهای تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل خطی می باشد ، به این ترتیب که از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می گیریم ، بعد از پیدا کردن لاپلاس (y) با فرض آنکه $Lg = G(s)$ آنگاه y را برابر با لاپلاس معکوس G فرض می کنیم و همچنین از تبدیل لاپلاس مشتق که در ذیل آمده است استفاده می کنیم :

$$L(y^n) = S^n L(y) - S^{n-1}(y(0)) - s^{n-2}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$$

مثال : در صورتی که y=sin2x باشد مطلوبست $L(y''') = ?$

$$n = 3$$

$$L(y^n) = S^3 L(y) - s^2(y(0)) - sy'(0) - y''(0)$$

$$\begin{cases} y' = 2\cos 2x \\ y'' = -4\sin 2x \\ y''' = -8\cos 2x \end{cases} \quad S^3 \frac{2}{4+S^2} - S^2(0) - s(2) - 0 \rightarrow \begin{cases} y(0) = \sin 2(0) = 0 \\ y'(0) = 2\cos 2(0) = 2 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow L(y''') = \frac{2S^3}{4+S^2} - 2S = \frac{2s^3 - 8s - 2s^3}{4+S^2} = \frac{-8s}{4+S^2}$$

تبدیل معکوس لاپلاس :

فرض کنید f(s) یک تابع لاپلاسی باشد ، آنگاه لاپلاس معکوس F تابعی مانند f کوچک است به طوری که لاپلاس f برابر F بزرگ باشد .

$$L^{-1}(F(s)) = f(x) \leftrightarrow L(f(x) = f(s)$$

مثال : معکوس لاپلاس توابع زیر را بدست آورید .

$$1) F(s) = \frac{4!}{S^5} \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{4!}{S^5}\right) = X^4$$

$$2) L^{-1}\left(\frac{2}{S^6}\right) = \frac{2}{5!} L^{-1}\left(\frac{5!}{S^6}\right) = \frac{2}{120} X^5 = \frac{X^5}{60}$$

$$3A = \frac{64 - 12 - 7}{16} \rightarrow A = \frac{15}{16} \rightarrow$$

$$L^{-1}\left(\frac{\frac{15}{12}}{S}\right) + L^{-1}\left(\frac{\frac{-3}{4}}{S^2}\right) + L^{-1}\left(\frac{\frac{7}{16}}{S-4}\right) =$$

$$\frac{15}{16} L^{-1}\left(\frac{1}{S}\right) - \frac{3}{4} L^{-1}\left(\frac{1}{S^2}\right) + \frac{7}{16} L^{-1}\left(\frac{1}{S-4}\right) \rightarrow$$

$$\frac{15}{16} - \frac{3}{4}x + \frac{7}{16}e^{4x}$$

استفاده از لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل :

یکی از کاربردهای تبدیل لاپالاس در حل معادلات دیفرانسیل خطی می باشد. به این ترتیب که از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می گیریم.

بعد از پیدا کردن لاپلاس (y) با فرض آنکه $Ly = G(s) \leftarrow$ آنگاه y را برابر با لاپلاس G فرض می کنیم و همچنین از تبدیل لاپلاس مشتق که در ذیل آمده است استفاده می کنیم :

$$L(y^n) = S^n L(y) - S^{n-1}(y(0)) - s^{n-2}\, y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)$$

مثال : در صورتی که y = Sin 2x باشد مطلوبست $L(y''') =$ ؟

$$L(y''') = S^3 L(y) - S^2 (y(0) - Sy'(0) - y''(0)$$

$$\begin{cases} y' = 2\,Cos\,2x \\ y'' = -4\,Sin\,2x \\ y''' = -8\,Cos\,2x \end{cases} \qquad S^3 \frac{2}{4+S^2} - S^2(0) - s(2) - \;\rightarrow \begin{cases} y(0) = Sin\,2\,(0) = 0 \\ y'(0) = 2Cos2(0) = 2 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow\; L(y''') = \frac{2S^3}{4+S^2} - 2S = \frac{2S^3 - 8s - 2S^3}{4+S^2} = \frac{-8S}{4+S^2}$$

$$L(y'') + 3L(y') + L(2x) = L(0) \rightarrow$$

$$S^2 Ly - Sy(0) - y'(0) + 3(s(y) - y(0)) + 2x\frac{11}{S^2} = \frac{0}{s}$$

$$\rightarrow S^2Ly - S - 2 + 3SL(y) - 3 + \frac{2}{S^2} = 0 \rightarrow$$

$$(S^2 + 3S)Ly = S + 5 - \frac{2}{S^2} \rightarrow$$

$$Ly = \frac{S}{S^2+3S} + \frac{5}{S^2+3S} - \frac{2}{S^2(S^2+3S)} \rightarrow$$

$$S(S+3)$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{1}{S+3}\right) + L^{-1}\left(\frac{5}{S(S+3)}\right) - 2L^{-1}\left(\frac{1}{S^3(S+3)}\right) \rightarrow$$

$$y = e^{-3x} + 5L^{-1}\left(\frac{1}{S(S+3)}\right) - 2L^{-1}\left(\frac{1}{S^3(S+3)}\right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{S(S+3)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+3} = \frac{A(S+3)+BS}{S(S+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{S} - \frac{\frac{1}{3}}{S+3}$$

$$S = 0 \rightarrow 3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$S = 0 \rightarrow B = \frac{-1}{3} \qquad \rightarrow 5\left[\frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{S}\right) - \frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{S+3}\right)\right]$$

$$\frac{1}{S^3(S+3)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S^2} + \frac{C}{S^3} + \frac{d}{S+3} = \frac{AS^2(S+3) + BS(S+3) + C(S+3)dS^3}{S^3(S+3)}$$

$$S = 0 \rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$S = -3 \rightarrow d = \frac{-1}{27}$$

$$S = 1 \rightarrow 4A + 4B + 4C + d = 1 = 4A + 4B = \frac{-8}{27}$$

$$S = -1 \rightarrow 2A - 2B - 2C - d = 1 = 2A - 2B = \frac{44}{27}$$

$$8A = \frac{8}{27} \rightarrow A = \frac{10}{27} \rightarrow \qquad 4B = \frac{-48}{27} \rightarrow B = \frac{-12}{27}$$

لاپلاس توابع زیر را بدست آورید؟

1) $f(x) = Sinx^2$

$L(y'') = S^2L(y) - Sy(0) - y'(0) \rightarrow$

$y' = 2Sin\,x\,Cos\,x = Sin\,2x$

$y'' = 2Cos\,2x$

$L(2Cos2x) = S^2L(Sin^2x) - S\times 0 - 0 \rightarrow$

$$L(Sin^2x) = \frac{2}{S(4+S^2)} = \frac{2}{4S+S^3}$$

2) $f(x) = Cos^3x = y$

$y' = -3Cos^2xSinx = -3CosxCosxSinx =$

$$\frac{-3}{2}Sin2x\,Cosx = \frac{-3}{2}\times\frac{1}{2}\left[Sin(2x+x) + Sin(2x-x)\right] =$$

$$\frac{-3}{4}\left[Sin3x + Sinx\right] \rightarrow$$

$$L(y') = SLy - y(0) \rightarrow \frac{-3}{4}\left[\frac{3}{9+S^2} + \frac{1}{1+S^2}\right] = SL(Cos^3x) - 1$$

$$SL(Cos^3x) = \frac{-9}{(36+4S^2)} - \frac{3}{4+4S^2} + 1 \rightarrow$$

$$LCos^3x = \frac{-9}{S(36+4S^2)} - \frac{3}{S(4+4S^2)} + \frac{1}{S}$$

معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس و شرایط داده شده حل کنید؟

$$1)\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2x=0 \qquad \begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=2 \end{cases}$$

$$y''+3y'+2x=0$$

$$-2\left[\frac{10}{27}L^{-1}\left(\frac{1}{S}\right)-\frac{12}{27}L^{-1}\left(\frac{1}{S^2}\right)+\frac{1}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{S^3}\right)-\frac{1}{27}L^{-1}\left(\frac{1}{S+3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\ y=x^{-3x}+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}e^{-3x}-\frac{20}{27}+\frac{24}{27}x-\frac{2}{6}x^2+\frac{2}{27}e^{-2x}$$

$$\rightarrow\ =\frac{-16}{27}e^{-3x}+\frac{24}{27}x-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{27}$$

حل معادله دیفرانسیل با استفاده از لاپلاس :

$$1)\,2y''-3y'-2=e^x \qquad y'(0)=y(0)=2$$

$$2L(y'')-3L(y')-2L(1)=L(e^x)=2(S^2L(y)-Sy(0)-y'(0))-$$

$$3(SL(y)-y(0)-2\times\frac{1}{S}=\frac{1}{S-1}\Rightarrow 2S^2L(y)-4S-4-$$

$$3SL(y)+6-\frac{2}{S}=\frac{1}{S-1}\ \Rightarrow (2S^2-3S)L(y)=\frac{1}{S-1}+\frac{2}{S}+4S-2$$

$$\rightarrow L(y)=\frac{1}{(S-1)S(2S-3)}+\frac{2}{S^2(2S-3)}+\frac{4S}{S(2S-3)}-\frac{2}{S(2S-3)}\Rightarrow$$

$$L(y)=\frac{S+2(S-1)+4S^2(S-1)-2S(S-1)}{S^2(S-1)(2S-3)}\ \rightarrow L(y)=\frac{4S^3-6S^2+5S-2}{S^2(S-1)(2S-3)}$$

$$\rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{4S^3-6S^2+5S-2}{S^2(S-1)(2S-3)}\right) = \frac{A}{S}+\frac{B}{S^2}+\frac{C}{S-1}+\frac{d}{2S-3} \Rightarrow$$

$$y = L^{-1}\left(\frac{AS(S-1)(2S-3)+B(S-1)(2S-3)+CS^2(2S-3)+dS^2(S-1)}{S^2(S-1)(2S-3)}\right) \Rightarrow$$

$$S=0 \rightarrow 3B=-2 \rightarrow B=\frac{-2}{3}$$

$$S=1 \rightarrow -C=1 \rightarrow C=-1$$

$$S=\frac{3}{2} \rightarrow \frac{9}{8}d=\frac{11}{2} \rightarrow d=\frac{44}{9}$$

$$S=-1 \rightarrow -10A+10B-5C-2d=-17 \rightarrow -10A=\frac{52}{9} \rightarrow A=-\frac{26}{45}$$

$$y=\frac{-26}{45}L^{-1}\left(\frac{1}{S}\right)-\frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{S^2}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{S-1}\right)+\frac{44}{9}L^{-1}\left(\frac{1}{25-\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$y=\frac{-26}{45}-\frac{2}{3}x-e^x+\frac{44}{9}\times\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x} \rightarrow$$

$$y=\frac{-26}{45}-\frac{2}{3}x-e^x+\frac{22}{9}e^{\frac{3}{2}x}$$

لاپلاس انتگرال :

$$L\left(\int_0 f(x)dx\right)=\frac{1}{S}L(f(X))=\frac{1}{S}F(S).$$

نتیجه :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{S}f(s)\right)=\int_0 f(x)dx=f(x)=L^{-1}(F(S)$$

$$1)y=\int_0^x (Sin2t+Cost)dt+sh2x \;\rightarrow$$

$$Ly=L\left(\int_0^x (Sin2t+Cost)dt+L(Sh2x)\right)\Rightarrow$$

$$\frac{1}{S}L(Sin2t+Cos)+\frac{4}{S^2-4}=\frac{1}{S}\left[\frac{2}{4+S^2}+\frac{S}{1+S^2}\right]+\frac{4}{S^2-4}\;\rightarrow$$

$$\frac{2}{2(4+S^2)}+\frac{1}{1+S^2}+\frac{4}{S^2-4}$$

$$2)y-\int_0^x Cos^2 4t\,dt-Sin3x:\rightarrow$$

$$L(y)=\frac{1}{S}L(Cos^2 4t)-\frac{3}{9+S^2}\Leftrightarrow\frac{1}{2(64+S^2)}-\frac{3}{9+S^2}$$

تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$)F(s)=\frac{1}{S(S+3)}\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{S(S+3)}\right)\rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{(S+3)}\right)=e^{-3t}\;\rightarrow$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{S(S+3)}\right)=\int_0^x e^{-3t}dt=\left[\frac{-1}{3}e^{-3t}\right]_0^x=\frac{-1}{3}e^{-3x}-(\frac{-1}{3})=$$

$$-\frac{1}{3}e^{-3x}+\frac{1}{3}$$

نکته : برای پیدا کردن لامپاس معکوس ابتدا لاپلاس معکوس (F_1 را بدست می آوریم و بعد n بار از

آن انتگرال می گیریم.

$$1) F(S)=\frac{1}{S^3(S+3)}=?$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{S+3}\right)=e^{-3t}$$

$$\int_0^x e^{-3t}dt=\frac{-1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}$$

$$\int_0^x\left(\frac{-1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}\right)dt=\left[\frac{1}{9}e^{-3t}+\frac{1}{3}t\right]_0^x=\frac{1}{9}e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$$

$$\int_0^x\left(\frac{1}{9}e^{-3x}+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}\right)dt=\left[-\frac{1}{27}e^{-3t}+\frac{1}{3}\times\frac{t^2}{3}-\frac{1}{9}t\right]_0^x$$

$$\frac{-1}{27}e^{-3x}+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}=L^{-1}\left(\frac{1}{S^3(S+3)}\right)$$

$$2) FS=\frac{4S}{S^3-4S^2}=L^{-1}\left(\frac{4S}{S^3-4S^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{4S}{S^2(S-4)}\right)=L^{-1}\left(\frac{4}{S(S-4)}\right)$$

$$\rightarrow 4L^{-1}\left(\frac{1}{S-4}=4e^{4x}\right)\rightarrow$$

$$4L^{-1}\left(\frac{1}{S(S-4))}\right)=4\int_0^x e^{4t}dt \Rightarrow 4\left[\frac{1}{4}e^{4t}\right]_0^x=4\left(\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\rightarrow e^{4x}+1$$

$$3) F(S)=\frac{2}{S^4-16S^2}-L^{-1}\left(\frac{2}{S^2(S^2-16)}\right)=2\times L^{-1}\left(\frac{1}{S-16}\right)$$

$$\frac{1}{4}L^{-1}\left(\frac{1\times 4}{S^2-16}\right)=\frac{1}{4}Sh4x$$

$$\int_0^x\frac{1}{4}Sh4tdt=\left[\frac{1}{16}Ch4t\right]_0^x=\frac{1}{16}Ch4x-\frac{1}{16}Ch$$

$$\int_0^x \left[\frac{1}{16}Ch4x - \frac{1}{16}\right].dt = \left[\frac{1}{64}Sht - \frac{1}{16}t\right]_0^x$$

$$2\times\left(\frac{1}{64}Sh4x - \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{32}Sh4x - \frac{1}{8}x$$

قضیه انتقال :

$L(e^{kx}f(x)) = f(S-K)$ که $F(S) = L(f(x))$

مثال : لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$1)\, f(x) = e^{2x}Cos3x \rightarrow L(Cos3x) = \frac{S}{9+S^2} \rightarrow$$

$$L(e^{2x}Cos3x) = \frac{S-2}{9+(S-2)^2}$$

$$2)\, f(x) = e^{-4x}Sh3x \rightarrow L(Sh3x) = \frac{3}{S^2-9} \rightarrow$$

$$L(e^{-4x}Sh3x) = \frac{3}{(S+4)^2-9}$$

لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید.

$$1)\frac{S+1}{(S+1)^2+1} \to L^{-1}\left(\frac{S}{S^2+1}\right)=Cosx \to$$

$$L^{-1}\left(\frac{S+1}{(S+1)^2+1}\right)=e^{-x}Cos\,x$$

$$2)\frac{S+3}{(S+1)^2-4} \to L^{-1}\left(\frac{S+2}{S^2-4}\right)=L^{-1}\left(\frac{S}{S^2-4}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{S^2-4}\right)=$$

$$Ch2x+Sh2x \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{S+3}{(S+1)^2-4}\right)=e^{-x}(Ch2x+Sh2x)$$

$$3)\frac{2S+1}{S^2+4S+13} \Rightarrow S^2+4S+13=(S+\frac{4}{2})^2-\frac{5}{4a^2}=$$

$$(S+2)^2-\frac{-36}{2}=(S+2)^2+9 \to$$

$$\frac{2S+1}{S^2+4S+13}=\frac{(2S+1)}{(S+2)^2+9} \to k=-2 \quad L^{-1}\left(\frac{2(S-2)+1}{S^2+9}\right)=$$

$$L^{-1}\left(\frac{2S-3}{S^2+9}\right) \to 2L^{-1}\left(\frac{S}{S^2+9}\right)=L^{-1}\left(\frac{3}{S^2+9}\right)=$$

$$2Cos3x-Sin3x \to L^{-1}\left(\frac{2S+1}{S^2+4S+13}\right)=e^{-2x}(2Cosx-Sin3x)$$

مشتق لاپلاس :

$$L(x^n f(x)=(-1)^n\left[L(f(x)\right]^{(n)}$$

مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

1) $f(t) = t'r^{2t}$

$$L(t'e^{2t}) = (-1)^1\left(\frac{1}{S-2}\right)^1 = -\frac{-1}{(S-2)^2} = \frac{1}{(S-2)^2}$$

$$L(e^{2t}) = \frac{1}{S-2}$$

2) $f(t) = t^2 S\,\mathrm{int}$

$$L(t^2 S\,\mathrm{int}) = (-1)^2\left(\frac{1}{1+S^2}\right)'' \qquad L(S\,\mathrm{int}) = \frac{1}{1+S^2} \rightarrow$$

$$\left[\frac{-2S}{(1+S^2)^2}\right]' = \frac{-2(1+S^2)^2 - (-2S)(2)(1+S^2)(2S)}{(1+S^2)^4} =$$

$$\frac{(1+S^2)\left[-2(1+S^2)+8S^2\right]}{(1+S^2)^4} = \frac{6S^2-2}{(1+S^2)^3}$$

3) $L((x^2+x)Shx) = x^2 Shx + xShx \rightarrow$

$$L(x^2 Shx) + L(xShx) = (-1)^2\left[L(Shx)\right]'' + (-1)^{-1}\left[L(Shx)\right]' \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{S^2-1}\right)' = \frac{-2S}{(S^2-1)^2}$$

$$\left(\frac{1}{S^2-1}\right)'' = \frac{-2(S^2-1)^2 - (-2S)(2)(S^2-1)(2S)}{(S^2-1)^4} = \frac{(S^2-1)\left[-2(S^2-1)+8s^2\right]}{(S^2-1)^4} \Rightarrow$$

$$= \frac{6S^2+2}{(S^2-1)^3} \rightarrow L((x^2+x)Shx) =$$

$$\frac{-2S}{(S^2-1)^2} - \frac{6s^2+2}{(S^2-1)^3} =$$

معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید؟

$$2y'' - y' + 3y = x^2 Cosx \qquad \begin{cases} (y(0)) = 2 \\ (y'(0)) = -1 \end{cases}$$

$$2L(y'') - L(y') + 3L(y) = L(x^2 Cosx) =$$

$$2(S^2L(y) - Sy(0) - y'(0)) - (SL(y) - y(0) + 3L(y) =$$

لاپلاس x^2Cosx را از راه مشتق لاپلاس حل می کنیم ، پس نتیجه می شود :

$$L(Cosx) = \frac{S}{S^2+1} \rightarrow \left(\frac{S}{S^2+1}\right)'' = \frac{(S^2+1) - S(2S)}{(S^2+1)^2} = \frac{1-S^2}{(S^2+1)^2}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1-S^2}{(S^2+1)^2}\right)' + \frac{-2S(S^2+1)^2 - (1-S^2)(2)(S^2+1)(2S)}{(S^2+1)^4} =$$

$$\frac{(S^2+1)\left[-2S^3 - 2S - 4S + 4S^3\right]}{(S^2+1)^4} = \frac{2S^3 - 6S}{(S^2+1)^3} \Rightarrow$$

$$(-1)^2 < \frac{2S^3 - 6S}{(S^2+1)^3}$$

$$2S^2L(y) - 4 + 2 - SL(y) + 2 + 3L(y) = \frac{2S^3 - 6S}{(S^2+1)^3} =$$

$$L(y)(2S^2 - S + 3) = \frac{2S^3 - 6S}{(S^2+1)^3} \rightarrow$$

$$L(y) = \frac{2S^3 - 6S}{(S^2+1)^3(2S^2 - S + 3)} \rightarrow y = L^1\left(\frac{2S^3 - 6S}{(S^2+1)^3(2S^2 - S + 3)}\right) =$$

$$:\frac{AS+B}{(S^2+1)'} + \frac{CS+D}{(S^2+1)^2} + \frac{ES+F}{(S^2+1)^3} + \frac{HS+K}{2S^2 - S + 3} = \ldots$$

انتگرال لاپلاس :

فرض کنید حد راست تابع $\frac{f(t)}{t}$ وقتی که $t \to 0$ وجود داشته باشد آنگاه :

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_{S}^{\infty} F(u)du \quad \text{که} \quad f(u) = L(f(x))$$

مثال : لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$$L\left(\frac{S\text{int}}{t}\right) = \quad < L(S\text{int}) = \frac{1}{1+S^2} >$$

$$\int_{S}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du = \left[Arc\tan u\right]_S^{+\infty} = Arc\tan(\infty) - Arc\tan(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{r} - Arc\tan(S)$$

$$2) L\left(\frac{e^t - Cost}{t}\right) = L(e^t - Cost) = \frac{1}{S-1} - \frac{S}{S^2+1} \Rightarrow$$

$$L\left(\frac{e^t - Cost}{t}\right) = \int_{S}^{+\infty}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{u}{u^2+1}\right)du \Rightarrow$$

$$\left[Ln|u-1| - \frac{1}{2}Ln|u^2+1|\right]_S^{+\infty} = \left[Ln\frac{|u-1|}{|u^2+1|^{\frac{1}{2}}}\right]_S^{+\infty} =$$

$$Ln\frac{u}{(u^2)^{\frac{1}{2}}} - Ln\frac{S-1}{(S^2+1)^{\frac{1}{2}}} = Ln\left(\frac{u}{u}\right) - Ln\frac{S-1}{\sqrt{S^2+1}} = -Ln\frac{S-1}{\sqrt{S^2+1}}$$

چند نکته که برای حل مسائل مشتق لاپلاس، انتگرال لاپلاس، لاپلاس مشتق و لاپلاس انتگرال مورد نیاز می‌باشد:

۱- معمولا لاپلاس $L(e^{at}f(t))$ با انتقال حل می‌شود.

۲- معمولا لاپلاس $L(t^{n}f(t))$ با مشتق لاپلاس حل می‌شود.

۳- معمولا اگر یک تابع کسری باشد با انتگرال لاپلاس حل می‌شود.

تمرینهای زیر را حل کنید:

1) $L(t e^{2t} \cos 3t)$

2) $L\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$

3) $L(e^{-t}\sin t \sin 2t)$

4) $L(t \cos t \sin 3t)$

5) $L(e^{t}\,Cht\,\cos t) =$

مقادیر انتگرال‌های زیر را بوسیله لاپلاس محاسبه کنید:

1) $\int_0^\infty e^{-t}\sin 2t\,dt$

2) $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$

3) $\int_0^\infty e^{-t}\,Cht\,dt$

4) $\int_0^\infty$ [illegible]

دنباله :

یک دنباله ، تابعی است از مجموعه اعداد طبیعی حسابی (R) به صورت زیر : $a = N \rightarrow R$ و معمولاً دنباله را به صورت a_n نشان می دهند.

مثال : در دنباله زیر ٤ جمله اول را بنویسید.

$$\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$$

$$= a_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \qquad a_3 = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

$$= a_2 = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \qquad a_4 = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

$$= a_n = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6}$$

تعریف سوی :

یک سری درواقع مجموع جملات یکی دنباله می باشد. یعنی اگر $\{a_n\}$ یکی دنباله باشد.

آنگاه $\leftarrow$ $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} ai$ مجموع n جمله اول دنباله $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} ai$

و که اگر S یک عدد مشخص باشد می گوئیم سوی همگی است.

مثال : تعین کنید کدامیک از سوی های زیر همگراست؟

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n2}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots +$$

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \rightarrow S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{2} - \ldots$$

$$\rightarrow S_n = \frac{3}{2}$$